Was hat Mathematik mit Wahrheit zu tun?

(oder: was Sie schon immer von den Grundlagen der Mathematik wussten, aber bisher nicht zu artikulieren brauchten)

von Rolf Mulczinski, Berlin

Als Mathematiker im Forschungsbereich algebraische Geometrie hat sich mir die Frage immer nur im Zusammenhang mit meinen schließlich formulierten Vermutungen und den darauf folgenden Beweisen gestellt. Hast du keinen Fehler gemacht, sind sie denn nun wahr? Dass ich mich auf die axiomatisch definierten und damit beweislos vorausgesetzten Eigenschaften der mathematischen Objekte meines Gebietes bezog, hat mein Vertrauen in die Wahrheit der daraus abgeleiteten Behauptungen nie erschüttert, weil immer genügend die Axiome erfüllenden Objekte, genügend Modelle vorhanden waren, um sicher zu sein, dass ich nicht über Trivialitäten nachdachte. Doch laut einer Philosophievorlesung an der FU-Berlin im letzten Semester dürfen wir nicht so überzeugt sein: „Müssten sich auch Mathematiker darauf verständigen, was eine Ebene, was eine Gerade usw. inhaltlich ist, sie würden sich um den Sinn und die Angemessenheit ihrer Begriffe genauso streiten wie die Philosophen." Aber es scheint ja noch schlimmer: „Warum gibt es in der Mathematik verbindliches und kanonisches Lehrbuchwissen und in der Philosophie nicht? Die Antwort ist klar: weil die Mathematiker die Wahrheitsfrage, also für die Prämissen ihrer Beweise offenlassen." (Zitate aus der Vorlesung) Nun wissen wir endlich, was wir schon insgeheim befürchtet haben, Mathematik hat mit „wirklicher" Wahrheit nichts zu tun, weil wir nicht mit „inhaltlichen" Definitionen arbeiten und die Wahrheit der Mengenaxiome nicht beweisen können. Ist es tatsächlich so?

Kommen wir zunächst zum Bedeutungsinhalt von Begriffen und nehmen wir das Beispiel einer Ebene, einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit der Dimension 2 oder einer projektiven Ebene oder endlichen affinen Ebene oder was sonst noch unter diesen Begriff fällt. In den drei genannten Fällen kann man die Frage nach der Angemessenheit nur stellen, wenn man die durch den Gebrauch des Wortes in der natürlichen Sprache hervorgerufene Vorstellung zum Maßstab nimmt. Aber in der Mathematik wird die umgangssprachliche Vokabel zum gleichlautenden Fachwort mit geändertem und klar definiertem Inhalt. Daher ist es nicht unangemessen, bei Wahl eines Grundpunktes eine wohlbestimmte Gerade die „unendlich ferne Gerade" einer projektiven Ebene zu nennen, obwohl sie auch „Transzendente" heißen könnte. Wegen ihrer Exaktheit und Eindeutigkeit hat jede Benennung, die unter dieselbe Definition fällt, denselben Inhalt, so dass unter Mathematikern höchstens manchmal eine Diskussion über Ästhetik oder Anregungspotential eines Ausdrucks stattfindet, da er ja auch der Intuition entsprechen soll. Manchmal erscheint die Wortwahl dem Außenstehenden nicht so geglückt oder gar unangemessen wie bei „Gruppenoperationen auf Schiefkörpern" oder Umgang mit „normalen gleichmäßig beschränkten Familien", manchmal falsch wie bei der Kurve, die sich als Gerade herausstellt. Bei neuer Wortwahl fällt die Entscheidung eher unter dem Prüfstein der Zweckmäßigkeit als der Angemessenheit.

Wenn alle Begriffe durch Definition auf andere zurückgeführt werden, dann ergibt sich entweder ein Zirkel oder es gibt undefinierbare Grundbegriffe. In der Philosophie werden zirkuläre Definitionen als Möglichkeit erwogen, in der Mathematik nicht. Die Ausdrücke der Mengenlehre und der Logik sind die Grundbegriffe, auf die sich alles bezieht. Dazu gehören die mathematischen Objekte „Menge" und „Klasse", das „Element Sein aus ...", die „Variable" und die aus der Umgangssprache bekannten logischen Konnektoren für Aussagen wie „nicht", „und" sowie den Quantor „für alle Objekte gilt:", woraus weitere uns vertraute Begriffe wie „es gibt ein Objekt, für das gilt:", „oder", „wenn ..., dann ..." definiert werden, weil die Anzahl der im Sinne der Rückführung auf Bekanntes undefinierten Begriffe so klein wie möglich gehalten werden soll. Daher treten, man staune, auch in der Mathematik unterschiedliche Schulen auf, die sich beispielsweise darin unterscheiden, dass in der einen, dem Intuitionismus, die Quantoren „für alle" und „es gibt" logisch voneinander unabhängig festgelegt werden, während im „Mainstream" der Existenzquantor $\exists x \ldots$ als $\neg\forall x\neg \ldots$ definiert wird. Keinen Unterschied gibt es in der Methode der Definition durch Bezug letztlich auf Grundbegriffe. Die inhaltliche Bedeutung mathematischer Begriffe ergibt sich allein aus den durch seine Definition festgelegten syntaktischen Bezügen. Das ist die Methode, die die mathematische Welt so präzise macht.

Sind denn diese Grundbegriffe klar und eindeutig? Die logischen Konnektoren und Quantoren sind in ihrem üblichen Gebrauch unmissverständlich, wenngleich auch andere logische Systeme möglich sind, und die Variablen als Platzhalter oder unbestimmte Verweise auf mathematische Objekte beziehen sich auf Klassen oder Mengen. Damit ist zu klären, was eine Menge „inhaltlich" ist. Eine Klasse ist genau dann Menge, wenn sie Element einer Klasse ist. Nur das allein ist der beweisrelevante Bedeutungsgehalt des Mengenbegriffes und nicht etwa die Beschreibung von Cantor als einer „Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unsrer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen". Damit bleiben nur „Klasse" und „Element aus" übrig, aber auch damit beginnt nicht die Diskussion unter den Mathematikern, sondern das definitorische Setzen von Axiomen: Zu jedem logischen Ausdruck A, der keine gebundenen Klassenvariablen enthält, gibt es eine Klasse, die mit $\{x|\ A(x)\}$ bezeichnet wird, und $y\in\{x|\ A(x)\}$ ist per Definition eine Bezeichnung für $y\in V \wedge A(x/y)$, den Ausdruck A, in dem x durch y ersetzt ist (Komprehensionsaxiom, zu dem wir $y\in V$ zusetzen, da das Elementsein von y die Mengeneigenschaft impliziert). Da ein Ausdruck in der formalen Sprache der Mengenlehre aus den atomaren Formeln $x\in y$ oder $x = y$ mittels Konnektoren oder Quantisierung zusammengesetzt ist und wegen des Extensionalitätsaxioms $\forall z\,(z \in X \leftrightarrow z \in Y)$, wird die Definition der Bedeutung von $y \in \{x|\ A\}$ syntaktisch auf die von $y \in x$ zwischen Variablen zurückgeführt, was prinzipiell immer erlaubt ist.

Für alle Begriffe bisher besteht volles Einvernehmen über die Art ihrer inhaltlichen Bedeutung. Sie dokumentiert sich nämlich ausschließlich durch per Definition erstellte Bezugnahmen zu anderen Begriffen, wobei ein Zirkel vermieden wurde. Damit bleibt nur noch die Definition für die Begriffe „Klasse“ und „ist Element aus“ zwischen Klassenvariablen durchzuführen. Auch da entsteht kein Streit: Sie erfolgt dadurch, dass keine weiteren Bezüge hergestellt werden, dass also das Wort „Klasse“ und die Wörterrelation „$\in$“ insofern bedeutungsschwach sind, als sie die Endpunkte von Definitionsreihen bilden, aber natürlich nicht bedeutungsleer sind wie der Begriff „xziveyc“ in der Umgangssprache, da sie im Gegensatz zu ihm definitorisch keineswegs isoliert sind, sondern im Gegenteil das ganze mathematische Begriffsgeflecht tragen. Dass „Klasse“ dem „xziveyc“ vorgezogen wird, liegt einfach daran, dass sie in der natürlichen Sprache eine gewisse willkommene intuitionsanregende Bedeutung aufweist, die jedoch keine Beweis- und Wahrheitsrelevanz hat. Genauso gut wäre „mathematisches Objekt“ möglich, während „Element aus“ in der Umgangssprache genau die Bedeutung hat, die in einem einfachen mathematischen Anwendungsmodell für einfache Cantorsche Mengen realisiert wird, weswegen diese Formulierung innerhalb des abstrakten mathematisch-logischen Systems sehr angemessen ist. Damit ist der erste Satz der oben erwähnten Philosophievorlesung widerlegt.

Die Axiome sind die Grundprämissen unserer Beweise. Sind sie wahr? Wahrheit bezeichnet im täglichen Leben ein Charakteristikum von Aussagen, die sich auf in der Realität auftretende Gegenstände beziehen. Wahre Aussagen nennen wir Tatsachen. Aber wir alle wissen, dass es oft keine eindeutigen Kriterien gibt, eine Aussage unserer Lebenswelt als Tatsache zu erkennen: Nieselt es nur oder regnet es schon? An diesem Beispiel wird deutlich, dass Wahrheitsentscheidungen exakte Begriffe erfordern, die die Mathematik, wie eben dargelegt, ohne Ausnahme zur Verfügung hat. Die Gegenstände der Mathematik sind die Klassen, die durch Klassenterme beschrieben werden, von denen wir die wichtigsten aufzählen: das Mengenuniversum (Allklasse) $V := \{x|\ x = x\}$, die leere Klasse $\varnothing := \{x|\ x \neq x\}$, die Paarklasse $\{x,y\} := \{z|\ z = x \vee z = y\}$, die Vereinigungsklasse $\cup x := \{z|\ \exists y \in x\ z \in y\}$, die Durchschnittsklasse $x \cap y := \{z|\ z \in x \wedge z \in y\}$, die Potenzklasse $\mathrm{Pot}(x) := \{z|\ z \subset x\}$, das Bild einer Funktion(sklasse) $F(x) := \{z|\ \exists y \in x\ (y,z) \in F\}$. (Das Doppelzeichen „:=“ dient zur Abkürzung von „ist Bezeichnung für“.) Durch die Einführung des Klassenbegriffs, durch eine sprachliche Neuschöpfung also, wurde die Russelsche Antinomie, dass nämlich $\{x|\ x \notin x\}$ keine Menge sein kann, elegant aus der Welt geschafft. Das ist ein erster Hinweis auf den sprachlich-zeichenhaften Charakter der mathematischen Objekte.

Auf welche Objekte der Realität beziehen sich die All- oder die leere Klasse? Sie bezeichnen nicht die Ideen, die sich tatsächlich in den Köpfen der Mathematiker mit diesen Sprachformen verbinden, auch nicht solche in einem vermeintlichen platonischen Ideenhimmel, sondern beziehen sich allein auf die Terme der Schriftsprache, die in einem Text auftreten, in dem sie definiert sind. Mit dieser konventionalistischen These, angelehnt an Hilberts Formalismus, wollen wir versuchen, die Unklarheiten zu beseitigen, die vielen Philosophen Anlass geben, sich bücherdicke Gedanken zur Existenz von Kardinalzahlen zu machen. Die Klassen V, $\emptyset$, $\{x,y\}$, $\cup x$, $Pot(x)$ usw. existieren als Wörter genauso wie Gott und Teufel ohne intersubjektiv erkennbaren oder festsetzbaren Bezug zur außersprachlichen Realität. Bedeutung erhalten diese Wörter durch Beziehungen untereinander und zu weiteren Vokabeln. Die Klassenterme selbst werden also zu den mathematischen Gegenständen erklärt! Gemäß dem Wahlspruch „no entity without identity" des Mathematikphilosophen Quine wird Gleichheit von Klassen mittels Elementegleichheit festgelegt: Durch „$X = Y$" := $X \subset Y \wedge Y \subset X$ mit $X \subset Y := \forall z\, (z \in X \rightarrow z \in Y)$" werden die Wörterpaare gekennzeichnet, denen wir die Eigenschaft derselben Identität von Klassen zumessen, wobei wir im Falle, dass mit X und Y nur unterschiedliche Schreibweisen desselben Klassenterms oder derselben Variable verwendet werden, $X = Y$ als direkt gegeben und nicht auf die Extensionalität gegründet auffassen wollen. Dadurch stellen wir eine von der üblichen Auffassung abweichende Interpretation des Extensionalitätsaxioms als die einer Definition vor. Dass zwei verschiedene Wörter dasselbe bezeichnen, ohne dass sie auf etwas Reales außerhalb der Sprache verweisen, sehen wir leicht an den Beispielen „Teufel" und „Satan", wobei wir einräumen, dass etliche Menschen an eine andere Wirklichkeit des Bösen glauben.

Auf diesem Wege sind auch die meisten Mengenaxiome als Definitionen eines Sprachregelsystems zu interpretieren. Betrachten wir ein mögliches und, wie mir scheint, auch weit verbreitetes Axiomensystem, das den Klassenbegriff verwendet und das wir in drei Typen einteilen:

0.1 (Komprehension)	Ist A eine Formel ohne gebundene Klassenvariablen, so ist $\{x \mid A\}$ eine Klasse, die die Mengen enthält, auf die A zutrifft.
0.2 (Extensionalität)	Sind X und Y Klassen, dann gilt $X = Y$ genau dann, wenn $\forall z\, (z \in X \leftrightarrow z \in Y)$
1.1 (Aussonderung)	Ist Y eine Klasse, dann gilt $\forall x\, (x \cap Y \in V)$
1.2 (Paarmenge)	$\forall x \forall y\, \{x,y\} \in V$
1.3 (Vereinigungsmenge)	$\forall x\, \cup x \in V$
1.4 (Potenzmenge)	$\forall x\, Pot(x) \in V$
1.5 (Ersetzung)	Ist F eine Funktion(sklasse), dann gilt $\forall x\, F(x) \in V$
2.1 (Unendlichkeit)	$\exists u\, (\emptyset \in u \wedge \forall x \in u\, x \cup \{x\} \in u)$

2.2 (Fundierung) Ist Y eine nichtleere Klasse, dann gilt $\exists x\in Y\ \ x\cap Y = \emptyset$

2.3 (Auswahl) $\forall x\ (\forall y\in x\ \ y\neq\emptyset \rightarrow \exists f$ (f ist Funktion auf x $\wedge$ $\forall y\in x\ f(y)\in y)$

(Die Axiomgruppe 1 kann deutlicher etwas anders formuliert werden: $\forall x...\exists z\ z =$ die betreffende Klasse.) Die Aussagen der Gruppe 1 deuten wir als Definitionen der $\in$-Relation von Klassentermen, deren Elemente ja Mengen sind, zur Allklasse und sie wirkt daher wie eine Mengenbildungsvorschrift; denn die allgemeine Festlegung der Mengenrelation $y\in X$ für einen Klassenterm X ergibt für $X = V = \{x|\ x = x\}$ keine Information. Mit den vorangehenden Festsetzungen lassen sich geordnete Paare und schließlich Funktionen definieren, so dass sich auch 1.5 als Definition entpuppt.

Damit stellen die ersten sieben Axiome kraft Übereinkunft wahre Aussagen dar, wobei wir den Wahrheitsbegriff noch näher betrachten werden. Leider ist formal ableitbar, dass die Widerspruchsfreiheit unserer Festlegungen nicht mit Mitteln des Systems bewiesen werden kann. Vom Fundierungs- und Auswahlaxiom lässt sich immerhin zeigen, dass sie unserem Regelwerk hinzugefügt werden können, ohne dass wir deswegen auf Antinomien stoßen. Daher ist lediglich noch zu klären, was es mit der Wahrheit des Unendlichkeitsaxioms auf sich hat. Nehmen wir irgendein zusätzliches Symbol U, definieren $U\in V$, $\emptyset\in U$ und für alle $x\in U$ induktiv in der Umgangssprache auch $x\cup\{x\}\in U$. Damit und mit Hilfe der Axiomgruppe 1 können wir es als wahr ansehen, dass die Mengen, die wir durch die die natürlichen Zahlen bezeichnenden Symbole $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, ... benennen können, sowohl Elemente von U als auch von V sind. Da unsere Vorschriften nicht unbedingt dazu führen sollen, dass U ausschließlich diese Elemente enthält, betrachten wir $u = \cap\{x|\ \emptyset\in x \wedge \forall y\in x\ y\cup\{y\}\in x \wedge x \neq U\}$ und setzen $\omega = u$, falls diese Menge nicht leer ist und $\omega = U$ andernfalls. Diese Alternative halten wir offen. Im ersten Falle entfernen wir das Symbol U wieder aus der $\in$-Relation zu V, so dass $\omega = \cap\{x|\ \emptyset\in x \wedge \forall y\in x\ y\cup\{y\}\in x\}$ in jedem Fall eine wohldefinierte Menge ist, und zwar die kleinste induktive bezüglich $\subset$, in der sich alle natürlichen Zahlen (in der genannten Mengendefinition) befinden. So wollen wir das Unendlichkeitsaxiom verstehen. Damit ist auch sichergestellt, dass das Mengenuniversum unendliche Mengen u enthält, was formal jedoch nichts weiter bedeuten soll, als dass es eine Injektion $\omega\rightarrow u$ gibt.

Wiederum verwenden wir den unklaren umgangssprachlichen Begriff „unendlich“ nur aus Gründen der Anregung der Vorstellungskraft und definieren seine inhaltliche Bedeutung allein über unser sprachliches Regelsystem, woran im umgangssprachlichen Sinne nichts Unendliches zu erkennen ist. Ähnliches gilt für die Vorstellung der Überabzählbarkeit. Es ist ein beweisbares Phänomen dieser durch die Axiome errichteten normativen Struktur, das die Annahme einer Surjektion $\omega\rightarrow Pot(\omega)$ zu einem Widerspruch führt, womit sich ein Unterschied zwischen den beiden Mengen offenbart, den man Kardinalität nennt. Damit sind also die Mengenaxiome als normative Aussagen zu verstehen, die die Grundbegriffe und Grundobjekte der Mathematik untereinander verbinden und ein Netzwerk errichten, die ihren Bedeutungsgehalt manifestieren. Die Axiome sind also nicht Prämissen von Beweisen, deren Wahrheitsfrage unbeantwortet bleibt, sondern sie gelten kraft Vereinbarung zur Definition der $\in$-Relation sowie des Unendlichen und dem Umgang mit ihm (2.2., 2.3), weswegen sie auch so präzise sein können im Gegensatz zu den Begriffen der Umgangssprache, die sich im Laufe der Geschichte entwickelten und deren Bedeutung sich durch ihren Gebrauch dokumentiert. Da er unterschiedlich sein kann, kann ihr Inhalt im Allgemeinen nicht exakt bestimmt werden.

Obwohl wir die Wirklichkeit durch eine Beschreibung in der Umgangssprache in großem Umfang erkennen können, reicht ihre Präzision oft jedoch nicht aus. Mathematische Modelle der manchmal skurrilen Gegebenheiten sind dort, wo unsere aus der menschlichen Erfahrung gebildeten Vorstellungen, die in der natürlichen Schriftsprache immerhin einen zeitunabhängigen intersubjektiven Code erhalten haben, nicht mehr genügen, ein erfolgreiches Mittel, die Welt zu erkennen. Das gilt insbesondere für die mathematischen Objekte selbst, die unsere Vorstellungskraft und Akzeptanz manchmal arg strapazieren, seien sie nun nur unendlich, überabzählbar oder gar unerreichbar. Die mathematischen Theorien der Physik, deren Axiome die in der Sprache der Mathematik formulierten Naturgesetze sind, werden auf ihren Wahrheitsgehalt untersucht, indem ihre Voraussagen innerhalb eines mathematisch-physikalischen Modells experimentell überprüft werden, was für die Mathematik nicht möglich ist, da ihre Objekte Sprachsymbole sind. Dennoch können wir in der mengentheoretischen Sprache auch definieren, was unter einem mathematischen Modell der Mathematik, was unter einem Modell der mathematischen Gesetze, der Mengenaxiome, verstanden werden kann. Die Kontrolle auf Wahrheit dieser Gesetze erfolgt dann nicht durch Experimente, sondern entweder innerhalb der natürlichen Sprache durch konkretes Überprüfen auf Gültigkeit oder mit Hilfe eines syntaktischen Vorgehens durch Aufstellen eines Beweises.

Ein mathematischer Satz über Axiome A_n erfüllende Objekte ist wahr im semantischen Sinne (gültig), wenn die Klasse der Modelle $M := \{m|$ für alle n gilt $m \models A_n\}$ nicht leer ist und er für alle $m \in M$ gilt. (Damit M eine Klasse ist, dürfen die Axiome nicht beliebig sein.) Dabei ist die Gültigkeitsrelation rekursiv folgendermaßen festgelegt: Für Elemente a, b in m ist $m \models a \in b$, wenn $a \in b$ gilt, $m \models \neg\varphi$ wird dadurch definiert, dass $m \models \varphi$ nicht gilt, $m \models \varepsilon \wedge \varphi$ soll heißen, dass sowohl $m \models \varepsilon$ als auch $m \models \varphi$ wahr sind und für $m \models \exists x\, \varphi\{x)$ ist ein $a \in m$ so anzugeben, dass $m \models \varphi(a)$ richtig ist. (Wenn die Axiome sich neben „$\in$" auf zusätzliche vorauszusetzende Grundfunktionen, –relationen und –konstanten stützen, bestehen die atomaren Aussagen nicht nur aus $a \in b$.) Hieran wird deutlich, dass sich die mathematische Gültigkeitsrelation $\models$ auf unsere natürlichen Vorstellungen von wahren Sachverhalten bezieht, jedoch nur auf die einfache und jedem zugängliche Wirklichkeit von schriftsprachlichen Zeichen, deren Existenz und Bezüge untereinander und deren Manipulationsregeln unmissverständlich sind.

Ein mathematischer Satz ist wahr in der Syntaxdefinition, wenn er gemäß den logischen Regeln (z.B. modus ponens) mit Hilfe der logischen Axiome (z.B. Spezialisierung) aus Axiomen A_n ableitbar ist. Das Beweisen kann streng exakt dann durch Kalküle ganz in speziell dafür definierten Modellmengen durchgeführt werden, die die möglichen Formeln und Beweise abbilden (z.B. Gödelkodierung), womit sich die Möglichkeit eröffnet, Aussagen über Widerspruchsfreiheit zu machen, ohne konkrete Modelle konstruieren zu müssen, die alle Axiome erfüllen. Das übliche Vorgehen ist aber die Vorgabe von axiomatischen Definitionen (A_n) und Konstruktion von erfüllenden Beispielen. Dadurch ist die darauf aufbauende Theorie konsistent, weil sie für die Beispiele widerspruchsfrei ist, allerdings nicht unbedingt vollständig (d.h. jeder Satz oder seine Verneinung ist wahr), was jedoch auch nicht notwendig ist, da viele Aussagen nicht in dem Sinne allgemeingültig sein müssen, dass sie für alle Modelle gelten sollen: Zum Beispiel gibt es endliche und unendliche Gruppen, so dass eine Aussage von der Endlichkeit der Gruppenordnung nicht für alle Modelle entweder gelten oder nicht gelten kann. Solche formulierbaren Aussagen haben ja auch wenig Relevanz für die inhaltliche Mathematik, sondern sie zeigen damit eher, dass die Ausdrucksfähigkeit der Prädikatenlogik 1. Stufe nicht optimal ist. Das ist jedoch ein schwieriges Thema.

Um den Unterschied zwischen den Wahrheitsdefinitionen auf den Punkt zu bringen, kann man sagen, dass Beweisen ein rein formallogisches sequenzielles Umformen von Aussagen mit Hilfe der Axiome aufgrund sprachlich-definitorischer Vereinbarungen ist, während es der Gültigkeitsbegriff erfordert, mathematische Objekte vorzuweisen, an denen die Gültigkeit der Aussagen konkret geprüft wird. Die Beweiskalküle benötigen neben der Existenz von Modellen oder äquivalent Sicherstellung der Konsistenz meist auch quasi maschinelle Berechenbarkeit und damit Endlichkeit. Damit wird deutlich, dass die semantische Wahrheit weniger verlangt als das syntaktische Beweisen, auch da die Gültigkeitsprüfung an durch die Metasprache ausgedrückten Modellen wiederum nur in der Metasprache erfolgt, der formalisierten Umgangssprache, die wir auch zur Formulierung der Mengenaxiome verwendet haben. Tatsächlich ist für einen bewiesenen Satz (aus konsistenten Axiomen) auch die Wahrheit im semantischen Sinne, die Gültigkeit im Modell gesichert: Beweisbarkeit impliziert Gültigkeit. Das Umgekehrte ist im Allgemeinen nach Gödels Unvollständigkeitssatz falsch. Außerdem kann die Wahrheitsdefinition nicht durch eine Formel der Theorie selbst geleistet werden.

Eine grundlegende Eigenschaft unseres endlichen Sprachsystems scheint also zu sein, dass der Wahrheitsbegriff nicht innerhalb eines Modells der Wirklichkeit definiert werden kann, sondern eine Festlegung erfordert, die vor der Modellbildung liegt und in der Umgangs- oder Metasprache erfolgt. Das ist für die Mathematik differenziert wie oben dargestellt geschehen und damit ist die Behauptung der in der Einleitung genannten Aussage der Philosophievorlesung an der FU-Berlin, die Mathematiker ließen die Wahrheitsfrage für die Prämissen ihrer Beweise offen, widerlegt. Der Wahrheitsbegriff in der Philosophie wird allerdings nicht definiert, sondern „expliziert“, weil er wie fast alle Wörter unter das das Dogma fällt, der Bedeutungsinhalt eines Begriffes sei schon vorgegeben. Das Gelingen der mathematischen Wirklichkeitsmodelle, insbesondere zur Erkenntnis der Realität in der Physik, ist im Gegensatz zu philosophischen Theorien jedoch gerade darauf zurückzuführen, dass die Mathematik Wörter der Umgangssprache ihrer Bedeutung enthebt und ihren Inhalt neu oder verändert, aber exakt und erfolgreich definiert. Dazu gehört auch der Wahrheitsbegriff. Sollen wir denn nun tausende Seiten philosophischer Explikationen des Wahrheitsbegriffes und Überlegungen über die Angemessenheit von Begriffsbildung, die im Allgemeinen ohne konkretes Ergebnis bleiben, studieren oder uns eher vom Erfolg der Reichhaltigkeit mathematischer Strukturen bei der Modellbildung auf allen Gebieten leiten lassen? Ein Politclown der 68er hat in anderem Zusammenhang die auch hier zutreffende „rhetorische Antwort“ gegeben: „Wenn’s denn der Wahrheitsfindung dient ....“